O.J.D.: 20866 E.G.M.: 125000



Fecha: 01/04/2008 Sección: CURIOSIDADES

Páginas: 96,97

JUEGOS MATEMATICOS

Cifras y letras

Un programa informático resuelve, con bastante ingenio, los problemas numéricos y verbales del conocido concurso televisivo

Juan M. R. Parrondo

La mayoría de los lectores conocerán el concurso *Cifras y Letras*. En él se alternan dos pruebas, una numérica y otra de construcción de palabras. En la primera de ellas se dan seis números, que

pueden ser 1, 2, 3,... 9, 10, 25, 50, 75 o 100, y un número "objetivo", que se encuentra entre 101 y 999. Con los seis primeros números hay que obtener, mediante las cuatro operaciones elementales (suma, resta, multiplicación y división), el número objetivo o acercarse a él lo máximo posible.

A pesar de la simplicidad matemática del problema, plantea algunas cuestiones interesantes. Cuando el número objetivo es grande, siempre me hago la siguiente pre-

gunta: "¿Cuál es el número máximo que puede obtenerse a partir de los seis números iniciales?" La respuesta no es difícil. Entre dos números cualesquiera, la multiplicación es la operación que da mayores resultados, excepto si uno de los números es 1, en cuyo caso es mejor sumar. La estrategia idónea para conseguir el mayor número posible es entonces multiplicar los seis números iniciales entre sí, si ninguno de ellos es 1. Si ocurre esto último, cómo deberíamos sumar el 1 para maximizar el resultado? Como $(a + 1) \times b = a \times$ \times b + b, habrá que conseguir que b sea lo más alto posible. Por tanto, la estrategia óptima consiste en sumar el 1 al menor de los números iniciales y multiplicar el resultado por los cuatro números restantes. Por ejemplo, el mayor número que se puede conseguir con 1, 3, 2, 10, 5 y 8 es $10 \times 8 \times 5 \times 3 \times (2 + 1) = 3600.$

Pero volvamos al problema original del concurso: conseguir el número objetivo a partir de los seis números dados. Pedro Reina, profesor de matemáticas, ha diseñado un programa capaz de resolver el problema en menos de un segundo, es decir, capaz de encontrar la combinación de operaciones que más se acerca al número objetivo. Podemos estar seguros de

que se trata de la mejor combinación, porque el algoritmo que utiliza el programa es una búsqueda exhaustiva a través de todas las posibles combinaciones. El método para codificar y explorar estas



combinaciones, de notable ingenio, ilustra una de las estrategias típicas de la inteligencia artificial: la búsqueda en árboles de decisiones.

Reina ha conseguido organizar todas las posibles combinaciones en un árbol que se crea a partir de una serie de decisiones, tal y como se muestra en la ilustración. Cada decisión consiste en elegir dos números y una operación a realizar entre ambos. No hay ninguna ambigüedad con respecto al orden en el que realizar la operación, puesto que la suma y la multiplicación son conmutativas y la resta y división sólo pueden dar un número entero y positivo con un orden dado. De hecho, para muchos pares de números, la división no puede realizarse de modo que el resultado sea un número entero, en cuyo caso dicha operación queda excluida.

En el primer ejemplo de la ilustración, hemos tomado el 10 y el 7 y los hemos multiplicado. Eliminamos de la lista los dos números seleccionados, el 10 y el 7, y añadimos el resultado de la operación, en este caso 70. Por tanto, tras cada paso, tenemos una serie de números más reducida. Después de cinco pasos el resultado es un único número. El algoritmo de Reina

explora todas estas posibles decisiones hasta encontrar el número objetivo en cualquiera de los pasos dados. Por ejemplo, en el segundo caso mostrado en la ilustración, el número objetivo, 288, se ha en-

contrado en el cuarto paso, por lo que no es necesario continuar. El algoritmo almacena el número que más se ha acercado al objetivo a lo largo de la exploración; por tanto, si en la búsqueda no se encuentra finalmente el número exacto, el programa da como solución la aproximación más cercana.

¿Es posible esta exploración exhaustiva en un tiempo razonable? Para responder a esta pregunta, calculemos primero el tamaño del árbol de combinaciones. En el pri-

mer paso podemos elegir $(6 \times 5)/2 = 15$ parejas de números y aplicarles 4 operaciones. Suponiendo que la división es siempre aplicable, el número de opciones en el primer paso es $4 \times (6 \times 5)/2 = 60$. En general, si disponemos de n números, las posibles opciones son:

$$4 \times n(n-1)/2 = 2n(n-1)$$

Por tanto, el número total de opciones en los cinco pasos es:

$$2^5 \times 6 \times (5 \times 4 \times 3 \times 2)^2 = 2.764.800$$

es decir, algo menos de 3 millones de posibilidades. Si descartamos la división, el resultado sería:

$$(3/2)^5 \times 6 \times (5 \times 4 \times 3 \times 2)^2 = 656.100$$

ligeramente superior al medio millón de posibilidades. La cifra final debe, pues, hallarse entre estas dos cantidades. En cualquier caso, se trata de un número asequible para que un ordenador moderno realice la exploración exhaustiva en segundos.

Reina ha incluido también en su algoritmo algunos trucos que lo aceleran,



O.J.D.: 20866 E.G.M.: 125000



Fecha: 01/04/2008 Sección: CURIOSIDADES

Páginas: 96,97

como empezar siempre operando con los números mayores o guardar combinaciones de cuatro números y evitar explorar ramas idénticas del árbol. En la página web pedroreina.net, hay una versión del programa en línea, que tarda pocos segundos, aun cuando se introduzcan números que no tienen solución exacta, situación en la que la exploración debe recorrer todo el árbol de posibilidades.

El programa de Reina no imita el modo como razonamos los humanos. Ante el problema de las cifras, creo que la gente utiliza en paralelo dos estrategias. En una de ellas tratamos de aproximarnos primero de forma "gruesa" al objetivo, combinando los números iniciales grandes y utilizando sobre todo multiplicaciones, para luego afinar la aproximación con los números pequeños mediante sumas y restas. Por ejemplo, en el caso que se ilustra, multiplicaríamos 75 x 4 = 300 y luego trataríamos de conseguir un 22 mediante combinaciones con el

resto de los números. Esta estrategia no conduce, aquí, a la solución exacta.

La segunda estrategia, más elaborada, consiste en descomponer en factores el número objetivo y tratar de construir dichos factores. Por ejemplo, 288 es 72 × 4 y el 72 es relativamente fácil de obtener a partir de los números iniciales. Observen que cada estrategia sitúa al principio o al final la multiplicación, que es una operación clave en todo el juego, ya que posee un mayor abanico de resultados.

Programar estas estrategias es muy complicado, porque no podemos formularlas con precisión y en ellas interviene en buena medida la intuición. Es como si recorriéramos el árbol de posibilidades de forma un tanto errática, comenzando a veces por el final y otras por el principio, descartando ramas por pura sospecha y adentrándonos con profundidad en otras que nos parecen prometedoras. Esta exploración tan "humana" supone un reto para la inteligencia artificial. En el problema de las "Cifras", la exploración exhaus-

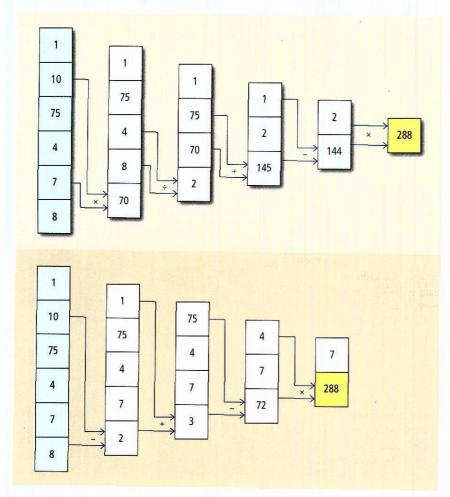
tiva es posible, pero en otros más complejos la máquina sigue estando por detrás de la mente. Lograr algoritmos de exploración que remeden la intuición del ser humano sigue siendo uno de los principales retos de la inteligencia artificial.

Reina ha diseñado también un algoritmo capaz de resolver la prueba de las "Letras". El problema es muy simple: se dan nueve letras y los concursantes han de generar con ellas la palabra más larga posible.

La solución que nos ofrece Reina es muy sencilla, gracias a una idea sumamente ingeniosa que el propio autor atribuye al profesor de inteligencia artificial Antonio Salmerón. Al escribir el programa, toma primero todas las palabras del diccionario de la Real Academia y ordena alfabéticamente las letras de cada palabra. Por ejemplo, "nutritivo" se convierte en "iinorttuv". Agrupa entonces estos anagramas según su longitud, los ordena alfabéticamente y los guarda en nueve ficheros: uno para los anagramas de nueve letras, otro para los de ocho, y así sucesivamente. Esta ordenación de las palabras del diccionario es la clave para encontrar la solución al problema.

Cuando nos dan las nueve letras con las que construir una palabra, el algoritmo las ordena alfabéticamente y busca en el fichero de anagramas de nueve letras. La búsqueda es muy rápida porque los anagramas están ordenados alfabéticamente. Si no encuentra la solución, elimina una de las letras y busca en el fichero de anagramas de ocho letras. Tiene que probar eliminando todas las letras, lo que da lugar a 9 posibilidades. Si no encuentra la solución, procede a eliminar dos letras y así sucesivamente. Como vemos, la idea de guardar las palabras del diccionario en forma de anagramas es clave para no tener que probar permutaciones de letras. Con ello se consigue un algoritmo bastante rápido y exhaustivo, como se puede comprobar en la página web de

En este caso, la solución dada, a pesar de su ingenio, no tiene nada que ver con el razonamiento humano. La forma en que las personas resolvemos este problema es aún más compleja que en el caso de las "Cifras" y utiliza una capacidad genuinamente humana: el uso del lenguaje. Y son precisamente los procesos cognitivos relacionados con el lenguaje natural los que suponen un mayor desafío en el campo de la inteligencia artificial.



Dos posibles soluciones de un problema de "Cifras", en el esquema de árbol de Pedro Reina. En el segundo caso, se llega al número deseado sólo en cuatro pasos.